三角形の中心点間の距離　　　　　品川公成

はじめに

三角形の中心点を収集している Encyclopedia of Triangle Centers(ETC)[1)]には、現在、約５万の中心点が掲載されています。そのうちの大部分の中心点は、中心点の研究に計算機が導入された以降のもので、重心、外心などユークリッドの時代から知られている中心点やそれ以降発見された中心点の数はそれほど多くはありません。ETC の中心点のうちの約５千の中心点はオイラー線上の中心点です。そのうちの重心、外心などを含む数多くの中心点では、その間の距離が定数比になることが知られています。先の解説「三角形の中心点とオイラー線」(以降、解説１と記す)では、オイラー線上の中心点を調べました。その結果をまとめると、面積座標で表した中心点 $P = (x_P, y_P, z_P)$は、一般に、$x_P = (GS^2+HS_BS_C)$, $y_P = (GS^2+HS_CS_A)$, $z_P = (GS^2+HS_AS_B)$のように表せることが分かりました。ここで、G と H は、一般に、三角形の辺の長さ a, b, c の対称関数で品川係数と呼ばれています。とくに、G と H が定数で与えられる中心点の間では、２つの中心点間の距離が定数比になります。この説明には、面積座標の代わりに新しい座標(オイラー座標と命名)を導入しました。つぎの解説「三角形の中心点とオイラー座標」[2)](以降、解説２と記す)では、オイラー座標について解説しました。直線上の中心点 P, Q から P と Q の間の距離を求めるには、$R = P - Q$ の面積座標が必要ですが、面積座標では中心点 $P=(x_P, y_P, z_P)$と $Q=(x_Q, y_Q, z_Q)$は、$x_P+ y_P+ z_P = x_Q+ y_Q+ z_Q =1$ のように三角形の面積で規格化されているので、中心点 $R = P - Q = (x_P - x_Q, y_P - y_Q, z_P - z_Q)$は $x_P - x_Q+ y_P - y_Q+ z_P - z_Q = 0$ なので、規格化すると無限大になり、中心点 R を面積座標で表すことができません。これまで、このような中心点は、infinite points と呼ばれる中心点に分類されてきました[3)]。解説２では、オイラー線を x 軸、それに直交する orthic axis を y 軸とする直交座標系によって、面積座標で表された中心点 $P=(x_P, y_P, z_P)$をオイラー座標 $P=(x_{Pe}, y_{Pe})$に変換することによって、通常の中心点と同様に infinite points のオイラー座標を $R = P - Q =(x_{Pe} - x_{Qe}, y_{Pe} - y_{Qe})$として求められることを示しました。この解説では、三角形の代表的な中心点のオイラー座標を求め、オイラー線を含めた種々の直線上の infinite points のオイラー座標から中心点間の距離を求めています。その結果、中心点間の距離が定数比になる関係は、オイラー線以外の直線上の中心点間でも成り立つことを示します。

１．　代表的な中心点の面積座標とオイラー座標

表１に、重心や外心など古くから知られている中心点とその後に発見された代表的な中心点について、その面積座標とオイラー座標を示しました。多くの中心点には、発見者の名前

が付けられていますが、最後の二つ、X(381)と X(1656)は、後述する中心点間の距離の基準に使うために追加した中心点で、オイラー線とそれぞれ Fermat 線、Napoleon 軸との交点に対応しています。 中心点の面積座標は三角形の 3 つの辺の長さ a, b, c, あるいは、それぞれの辺に向かう頂角 A, B, C で表わされています。面積座標については、解説 1 を参照してください。また、表 1 の一番右側の列に各中心点がのる直線名を示しました。各直線とその上の中心点については、ETC の **Tables** の中の"Central Lines"を参照してください [1)]。

表１　代表的な中心点の面積座標とオイラー座標

X(n)	**中心名’**	**面積座標**	**オイラー座標(x, y)**	**直線名***
X(1)	Incenter(内心)	a : b : c	$(\$aS_A\$, \$aS_A(S_B-S_C)\$)/\$a\$$	IN, Ng, S, OI
X(2)	Centroid(重心)	1 : 1 : 1	((E+F), 0)/3	E, Ng. L
X(3)	Circumcenter(外心)	sin 2A ::	((E-2F), 0)/2	B, E, OI
X(4)	Orthocenter(垂心)	tan A ::	(3F, 0)	E
X(5)	Nine-point center	a cos(B - C) ::	((E+4F), 0)/4	E, IN
X(6)	Symmedian point	$a^2 : b^2 : c^2$	$(2S^2, -S_A^2(S_B-S_C)\$)$ $/\{2(E+F)\}$	B, F, Np
X(7)	Gergonne point	1/(b + c - a) ::	$(-(E-5F)r\$a\$+2(r+ 2R)$ $\$aS_A\$, 2(r + 2R)$ $\$aS_A(S_B-S_C)\$)$ $/\{(r + 4R)\$a\$\}$	S, L
X(8)	Nagel point	(b + c - a) ::	$((E+F)\$a\$-2\$aS_A\$,$ $-2\$aS_A(S_B-S_C)\$)/\$a\$$	Ng
X(9)	Mittenpunkt	a(b + c - a) ::	$((E-2F)r\$a\$+2(E+F)R\$a\$$ $-(r+2R)\$aS_A\$,$ $-(r+2R)\$aS_A(S_B-S_C)\$)$ $/\{(r+4R)\$a\$\}$	L
X(10)	Spieker point	b + c : :	$((E+F)\$a\$ -\$aS_A\$,$ $-\$aS_A(S_B-S_C)\$)/(2\$a\$)$	Ng
X(11)	Feuerbach point	(b + c - a) $(b - c)^2$: :	$((E+4F)r\$a\$-2R\$aS_A\$,$ $-2R\$aS_A(S_B-S_C)\$)$ $/\{2(2r-R)\$a\$\}$	IN
X(12)	---	$(b + c)^2$ /(b + c - a) : :	$((E+4F)r\$a\$+2R\$aS_A\$,$ $2R\$aS_A(S_B-S_C)\$)$ $/\{2(2r+R)\$a\$\}$	IN

X(13)	Fermat point	a sec(A - π/6) ::	$((3)^{1/2}(E+10F)S+6S^2,$ $-3\$S_A{}^2(S_B-S_C)\$)$ $/[6\{(E+F)+(3)^{1/2}S\}]$	F
X(14)	2nd Isogonic point	a sec(A + π/6) ::	$(-(3)^{1/2}(E+10F)S+6S^2,$ $-3\$S_A{}^2(S_B-S_C)\$)$ $/\{6(E+F)-(3)^{1/2}S\}$	F
X(15)	1st Isodynamic pt.	a cos(A - π/6)::	$(3(3)^{1/2}(E+F)S+6S^2,$ $-3\$S_A{}^2(S_B-S_C)\$)$ $/[6\{(E+F)+(3)^{1/2}S\}]$	B
X(16)	2nd Isodynamic pt.	a cos(A + π/6)::	$(-3(3)^{1/2}(E+F)S+6S^2,$ $-3\$S_A{}^2(S_B-S_C)\$)$ $/[6\{(E+F)-(3)^{1/2}S\}]$	B
X(17)	1st Napoleon point	a csc(A+π/6) ::	$(3(3)^{1/2}(E+2F)S+6S^2,$ $-3\$S_A{}^2(S_B-S_C)\$)$ $/[2\{3(E+F)+5(3)^{1/2}S\}]$	Np
X(18)	2nd Napoleon pt.	a csc(A -π/6) ::	$(-3(3)^{1/2}(E+2F)S+6S^2,$ $-3\$S_A{}^2(S_B-S_C)\$)$ $/[2\{3(E+F)-5(3)^{1/2}S\}]$	Np
X(20)	de Longchamps pt.	tan B + tan C - tan A ::	((E-5F), 0)	E, S
X(21)	Schffler point	a(cosB+cosC)::	((E+F)+(E-2F)R, 0) /(2r+3R)	E
X(40)	Bevan point	a(cos B+cos C -cos A -1}::	$((E-2F)\$a\$-\$aS_A\$,$ $-\$aS_A(S_B-S_A))/\$a\$$	OI
X(381)	Midpoint of X(2) and X(4)	a(cosA +4cosBcosC) : :	((E+10F), 0)/6	E, F
X(1656)		3+cot Bcot C : :	(3(E+2F), 0)/10	E, Np

*B : Brocard axis, E : Euler line, F: Fermat line, IN : X(1)X(5) line, L : X(2)X(7) line, Ng : Nagel line, Np : Napoleon axis, S : Soddy line, OI : X(1)X(3) line

表 1 で、中心点のオイラー座標 $P = (x_e, y_e)$は、規格化された面積座標で表された中心点の座標 $P = (x, y, z)$ を以下の変換式で変換した座標です。

$$x_e = S_Ax + S_By + S_Cz$$
$$y_e = S_A(S_B - S_C)x + S_B(S_C - S_A)y + S_C(S_A - S_B)z \qquad (1)$$

ここで、S_A, S_B, S_C は、Conway の記号[3)]で、表 1 の E, F は

$$E = (S_B+S_C)(S_C+S_A)(S_A+S_B)/S^2,$$
$$F = S_A S_B S_C/S^2. \quad (2)$$

で、$ … $ は … をサイクリックに置き換えて加えたものです。

２． Infinite points のオイラー座標と中心点間の相対距離

表 2-1 に、オイラー線上の infinite points {X(n) - X(2)}のオイラー座標を示しました。この結果から、すべての infinite points のオイラー座標は、((E-8F) , 0)に比例していることが分かります。したがって、infinite points X(n)-X(2)の大きさ |X(n)-X(2)|、すなわち、中心点 X(n)と中心点 X(2)の距離は、互いに比例していることになります。表 2-1 では、中心点間の距離を|X(3)-X(2)|の比、すなわち相対距離でまとめました。ここで、|X(21) -X(2)|/|X(3)-X(2) |の R は三角形の外接円の半径、r は内接円の半径です。

表 2-1 Infinite points のオイラー座標と中心点間の相対距離

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	|X(n) - X(2)|/|X(3) - X(2)|
X(3) - X(2)	((E-8F) , 0)/6	1
X(4) - X(2)	- ((E-8F) , 0)/3	2
X(5) - X(2)	- ((E-8F) , 0)/12	1/2
X(20) - X(2)	((E-8F) , 0)(2/3)	4
X(21) - X(2)	(E-8F) , 0)(r/{3(2r+3R)}	2r/(2r+3R)

表 2 -1 の infinite points のオイラー座標から、各中心点は、オイラー線上を X(2)を中心に X(4), X(5), X(2), X(3), X(20)の順に並んでいることが分かります。また、オイラー線上の infinite points X(n)-X(m)は

$$X(n)-X(m)=\{X(n)-X(2)\}-\{X(m)-X(2)\} \quad (3)$$

のように表せるので、対応する中心点間の距離 |X(n)-X(m) |は表 1 から求められます。例えば、X(5)-X(4)は、((E-8F) , 0) {-1/12-(-1/3)}= ((E-8F) , 0)(1/4) なので、|X(5)-X(4)| / |X(3)-X(2)| = 3/2、また、X(20)-X(3)は、((E-8F) , 0) {2/3-(1/6)}= ((E-8F) , 0)(1/2) なので、|X(20)-X(3)| / |X(3)-X(2)| = 3 となります。このようにして、以下の関係が求まります。

$$|X(5)-X(4)|:|X(2)-X(5)|:|X(3)-X(2)|:|X(20)-X(3)| = 3/2:1/2:1:3. \quad (4)$$

なお、Schiffler 点 X(21)と他の中心点との距離は、三角形によって変わるので、このような定数比の関係は成り立ちません。

オイラー線以外の直線上の Infinite points についても同様にオイラー座標と中心点間の相対距離を求めることができます。結果を表２-２にまとめました。

表 2-2 種々の infinite points のオイラー座標と中心点間の相対距離

(a) Nagel line

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	|X(n) - X(1)|/|X(2) - X(1)|
X(2) - X(1)	$((E+F)\$a\$-3\$aS_A\$,$ $-3\$aS_A(S_B-S_C)\$)/(3\$a\$)$	1
X(8) - X(1)	$((E+F)\$a\$-3\$aS_A\$,$ $-3\$aS_A(S_B-S_C)\$)/(\$a\$)$	3
X(10) - X(1)	$((E+F)\$a\$-3\$aS_A\$,$ $-3\$aS_A(S_B-S_C)\$)/(2\$a\$)$	3/2

(b) OI line

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	|X(n) - X(1)|/|X(3) - X(1)|
X(3) - X(1)	$((E-2F)\$a\$- 2\$aS_A\$,$ $-2\$aS_A(S_B-S_C)\$)/(2\$a\$)$	1
X(40) - X(1)	$((E-2F)\$a\$- 2\$aS_A\$,$ $-2\$aS_A(S_B-S_C)\$)/\$a\$$	2

(c) L(2,7) line

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	|X(n) - X(2)|/|X(7) - X(2)|
X(7) - X(2)	$-2((2E-7F)r\$a\$+2(E+F)R\$a\$$ $-3(r+2R)\$aS_A\$, -3(r+2R)$ $\$aS_A(S_B-S_C)\$)/\{3(r+4R)\$a\$\}$	1
X(9) - X(2)	$((2E-7F)r\$a\$+2(E+F)R\$a\$$ $-3(r+2R)\$aS_A\$, -3(r+2R)$ $\$aS_A(S_B-S_C)\$)/\{3(r+4R)\$a\$\}$	1/2

(d) Brocard axis

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	|X(n) - X(3)|/|X(6) - X(3)|
X(6) - X(3)	$-((E+F)(E-2F)-2S^2, \$S_A{}^2(S_B-S_C)\$)$	1

	$/\{2(E+F)\}$	
X(15) - X(3)	$-((E+F)(E-2F)-2S^2, S_A^2(S_B-S_C)\$)$ $/[2\{(E+F)+(3)^{1/2}S\}]$	$(E+F)/[2\{(E+F)+(3)^{1/2}S\}]$
X(16) - X(3)	$-((E+F)(E-2F)-2S^2, S_A^2(S_B-S_C)\$)$ $/[2\{(E+F)+(3)^{1/2}S\}]$	$(E+F)/[2\{(E+F)-(3)^{1/2}S\}]$

(e) IN line

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	$\|X(n) - X(1)\|/\|X(5) - X(1)\|$
X(5) - X(1)	$((E+4F)\$a\$-4\$aS_A\$,$ $-4\$aS_A(S_B-S_C))/\{4\$a\$\}$	1
X(11) - X(1)	$r((E+4F)\$a\$-4\$aS_A\$,$ $-4\$aS_A(S_B-S_C))]/\{2(2r-R)\$a\$\}$	$2r/(2r-R)$
X(12) - X(1)	$r((E+4F)\$a\$-4\$aS_A\$,$ $-4\$aS_A(S_B-S_C))]/\{2(2r+R)\$a\$\}$	$2r/(2r+R)$

(f) Soddy line

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	$\|X(n) - X(1)\|/\|X(7) - X(1)\|$
X(7) - X(1)	$-r((E-5F)\$a\$-\$aS_A\$,$ $-\$aS_A(S_B-S_C)\$)/\{(r+4R)\$a\$\}$	1
X(20) - X(1)	$2(r+2R)((E-5F)\$a\$-\$aS_A\$,$ $-\$aS_A(S_B-S_C)\$)/\{(r+4R)\$a\$\}$	$2(r+2R)/r$

(g) Fermat line

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	$\|X(n) - X(6)\|/\|X(381) - X(6)\|$
X(381) - X(6)	$((E+F)(E+10F)-6S^2,$ $3\$S_A^2(S_B-S_C)\$)$ $/\{6(E+F)\}$	1
X(13) - X(6)	$(3)^{1/2}S((E+F)(E+10F)-6S^2,$ $3\$S_A^2(S_B-S_C)\$)$ $/[6(E+F)\{(E+F)+(3)^{1/2}S\}]$	$(3)^{1/2}S/\{(E+F)+(3)^{1/2}S$
X(14) - X(6)	$-(3)^{1/2}S(12(E+F)(E+10F)-6S^2,$ $3\$S_A^2(S_B-S_C)\$)$ $/[6(E+F)\{(E+F)-(3)^{1/2}S\}]$	$-(3)^{1/2}S/\{(E+F)-(3)^{1/2}S\}$

(h) Napoleon axis

Infinite points	**オイラー座標(x, y)**	|X(n) - X(6)|/|X(1656) - X(6)|
X(1656) - X(6)	$(3(E+F)(E+2F)- 10S^2,$ $5\$S_A^2(S_B-S_C)\$)/\{10(E+F)\}$	1
X(17) - X(6)	$(3)^{1/2}S(3(E+F)(E+2F)-10S^2,$ $5\$S_A^2(S_B-S_C)\$)$ $/[2(E+F)\{3(E+F)+5(3)^{1/2} S\}]$	$5(3)^{1/2}S/\{3(E+F)-5(3)^{1/2}S\}$
X(18) - X(6)	$-(3)^{1/2}S(3(E+F)(E+2F)-10S^2,$ $5\$S_A^2(S_B-S_C)\$)$ $/[2(E+F)\{3(E+F)-5(3)^{1/2} S\}]$	$-5(3)^{1/2}S/\{3(E+F)-5(3)^{1/2}S\}$

表 2-2 (a) の Nagel 線上の infinite points は、オイラー線上の infinite points と同様に、Nagel 線上で X(1), X(2), X(10), X(8)あるいはその逆の順に並び、その間の距離は

$$|X(2)-X(1)| : |X(10)-X(2)| : |X(8)-X(10)| = 1 : 3/2 : 3 \qquad (5)$$

となります。同様に、OI 線では、線上に X(1), X(3), X(40)の順に、L(2,7)線では、線上に X(7), X(2), X(9)の順に並んでおり、中心点間の距離について以下の関係が成り立ちます。

$$|X(3)-X(1)| : |X(40)-X(3)| = 1 : 1\ ,$$
$$|X(2)-X(7)| : |X(9)-X(2)| = 1 : 1/2\ . \qquad (6)$$

このように、オイラー線上で中心点間で成り立つ距離の定数比の関係は、他の直線上の中心点間でも成り立つことが分かります。なお、その他の直線上の中心点の間では、定数比の関係はありません。

３． 各直線上の Infinite points と中心点間の距離

表 2 の中心点間の相対距離から中心点距離を求める距離の公式を使います。オイラー座標系は、通常の直交座標系（Cartesian coordinates system）の x 軸と y 軸のスケールをそれぞれ $(E-8F)^{1/2}$, $(E-8F)^{1/2}S$ 倍した直交座標系なので、2 つの中心点のオイラー座標を $P = (x_{eP}, y_{eP})$と $Q = (x_{eQ}, y_{eQ})$ とすると、中心点間の距離 D は、以下のように与えられます。

$$D = \{(x_{eP} - x_{eP})^2S^2 + (y_{eQ} - y_{eQ})^2]^{1/2}/\{(E-8F)^{1/2}S\} \qquad (7)$$

表 3 に各直線上の infinite points {X(n)-X(m)}と式(9)から求めたその大きさ|X(n) - X(m)|、すなわち、中心点 X(n)と中心点 X(m)との距離をまとめました。

表 3 各直線上の infinite points と中心点間の距離

直線名	Infinite points	|X(n) - X(m)|
Euler line	{X(3) - X(2)}	$(E-8F)^{1/2}/6$ or $(-2F+R^2)/3$
Nsgel line	{X(2) - X(1) }	$(F+4R^2-12rR+6r^2)^{1/2}/3$
OI line	{X(3) - X(1)}	$(R^2-2rR)^{1/2}$*
L(2,7) line	{X(7) - X(2)}	$2\{(4R^2+8rR-5r^2)F$ $+2(8R^4-8rR^3-16r^2R^2-12r^3R-3r^4)\}^{1/2}$ $/\{3(4R+r)\}$
Brocard axis	{X(6) - X(3)}	$\{(E+F)^2E-3ES^2\}^{1/2}/\{2(E+F)\}$
IN line	{X(5) - X(1)}	$(R-2r)/2$
Soddy line	{X(7) - X(1)}	$(-3F+4R^2-4rR-2r^2)^{1/2}r/(4R+r)$
Fermat line	{X(381) - X(6)}	$(E-8F)^{1/2}\{(E+F)^2-3S^2\}^{1/2}$ $/\{6(E+F)\}$
Napoleon axis	{X(1656) - X(6)}	$\{(E+F)^2(9E+8F)-5(7E-8F)S^2\}^{1/2}$ $/\{10(E+F)\}$

*Euler's Theorem

表 3 の結果と表 2 から、すべての中心点間の距離を求めることができます。例えば、de Longschamps point X(20)と重心 X(2)との距離 |X(20)-X(2)|は

$$|X(20)-X(2)| = 4\,|X(3)-X(2)| = 4(E-8F)^{1/2}/6 = 2(E-8F)^{1/2}/3, \tag{8}$$

また、Nagel point X(8)と内心 X(1)との距離 |X(8)-X(1)|は

$$|X(8)-X(1)| = 3\,|X(2)-X(1)| = 3(F+4R^2-12Rr+r^2)^{1/2}/3 = (F+4R^2-12Rr+r^2)^{1/2} \tag{9}$$

となります。

なお、式(9)を用いて表 3 の|X(n) - X(m)|を求めるには、以下の関係式を用いています。

$$\$aS_A(S_B-S_C)\$^2 = S^2\{-(E+F)F\$a\$^2+6Fabc\$a\$+(E-2F)S^2-2\$abS_AS_B\$\}$$
$$\$S_A{}^2(S_B-S_C)\$^2 = -(E+F)^3FS^2+(E^2+20EF-8F^2)S^4-4S^6 \tag{10}$$

おわりに

ここでは、はじめに、三角形の代表的な中心点について、そのオイラー座標を求めました。

つぎに、これらの中心点が通る直線上の infinite points のオイラー座標を求めました。その結果、ひとつの直線上の infinite points のオイラー座標は互いに比例していること、すなわち、infinite points の大きさ、すなわち、直線上の中心点間の距離は互いに比例することが分かりました。したがって、中心点間の距離が定数比になるという関係は、infinite points のオイラー座標の比例係数が定数となる infinite points の間の中心点で成り立つことになります。このような関係は、これまでオイラー線上の中心点で知られていましたが、Nagel 線など他の直線上の中心点の間でも成り立つことを示しました。最後に、オイラー座標系における距離の公式を用いて、それぞれの直線上の代表的な中心点間の距離を求めました。この結果を使えば、すべての中心点間の距離が求まります。

参考文献

1) C. Kimberling : Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

2) K. Shinagawa, C. Kimberling, and P.Moses : Euler Coordinates in the Plane of a Triangle, International Journal of Computer Discovered Mathematics, **7** (2022) 297~318.

3) P. Yiu : Introduction to the Geometry of the Triangle, 2001, revised 2013, http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry130411.pdf.

4) J. H. Conway : Triangle Notation, https://en. wikipedia.org/wiki/Conway_ triangle_ notation/.