

三角形の中心点とオイラー線

品川公成

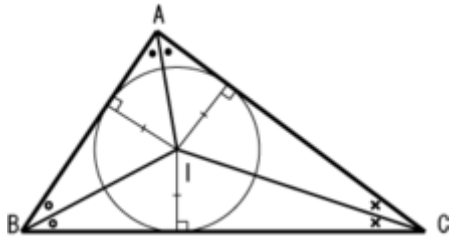
はじめに

はじめに、数学が専門でない筆者がなぜ三角形のオイラー線の問題に関わるようになったのか、その経緯からお話しします。きっかけは、「ロングステイ横浜」の会長であるアマチュア数学者の増渕健次郎氏との出会でした。彼は、当時、任意の三角形に内接あるいは外接する正三角形の挙動について考えていました。彼とのつき合いが始まってから、しばらくして、内接正三角形の重心の軌跡は、元三角形のオイラー線に垂直でフェルマー点を通る直線で、外接正三角形の重心の軌跡は、元三角形のオイラー線上の重心を中心とする円になることが分かりました。その後、これらの結果を増渕氏と連名で英文の論文にまとめて、米国のエバンスビル大学数学科の Clark Kimberling 教授 (University of Evansville, IN, USA) に査読をお願いしました。彼は、インターネット上で、“**Encyclopedia of Triangle Centers**” というサイトを主宰している三角形の中心点に関する専門家です。その後、先の論文の内容は、すでに知られていることが分かり、論文の方はボツになりましたが、これを契機に Kimberling 教授と知り合いになり、また、三角形の中心点とオイラー線の問題に関心をもちました。とくに、なぜ、任意の三角形の重心、垂心、外心などの数多くの中心点の一つの直線であるオイラー線上にのるのか、また、なぜ、これらの中心点間の距離がつねに整数比で表せるのかに興味をもちました。ここでは、よく知られた三角形の 5 心の復習から始めて、三角形の中心点とオイラー線との関係について、これまで調べてきたことを中心に解説します。

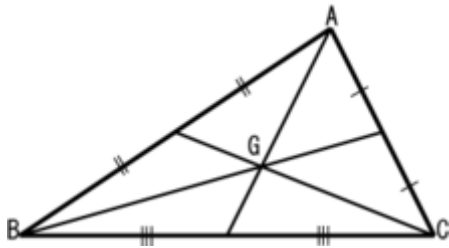
1. 三角形の 5 心

三角形には、よく知られた中心点として、5 心、すなわち、内心、重心、外心、垂心および傍心があることが知られています。以下では、それぞれの中心点を復習します。

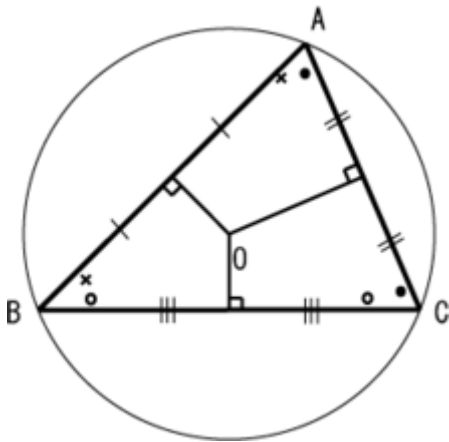
内心 : 三角形の 3 つの内角の二等分線の交点を内心といいます。内心は 3 つの辺から等距離にあり、3 つの辺に内接する円があります。この円を内接円といいます。



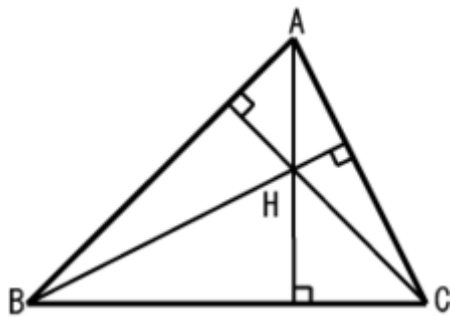
重心 : 三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ 3 つの線分の交点を重心といいます。



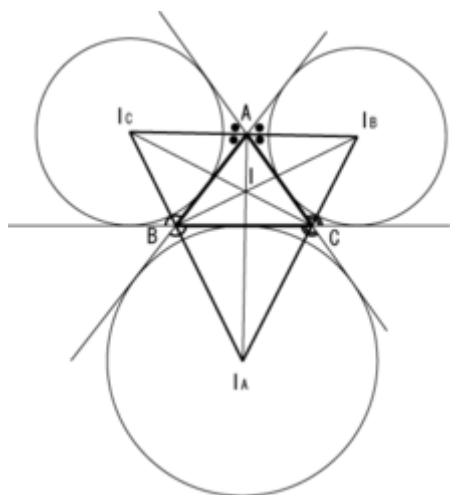
外心 : 三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点を外心といいます。外心は 3 つの頂点から等距離にあり、外心を中心として 3 つの頂点を通る円を外接円といいます。



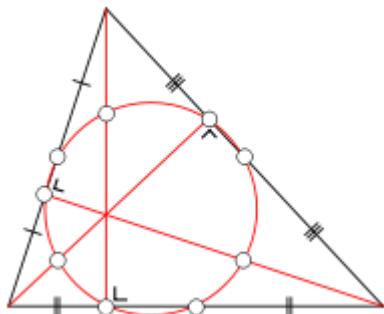
垂心 : 三角形の 3 つの頂点からそれぞれの対辺に引いた 3 つの垂線の交点を垂心といいます。



傍心： 三角形の 1 つの内角と他の 2 つの外角の二等分線の交点を傍心といいます。傍心は 1 つの辺と 2 つの辺の延長線と等距離にあり、傍心を中心として半径がその距離である円を傍心円といいます。三角形の傍心は 3 つの外角に対応して 3 つあります。

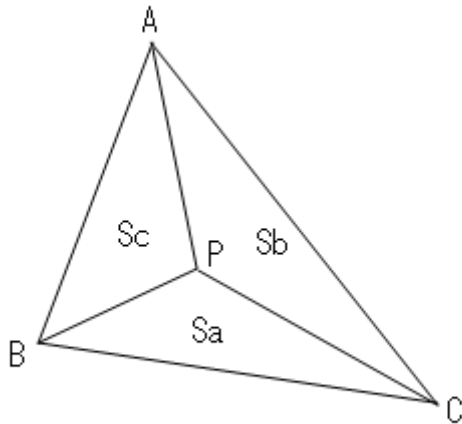


なお、三角形には、この他に数多くの中心があります。その中から、有名な中心の例として**9点中心**を紹介しておきます。この中心は、下の図に示すような9個の点を通る円(フォイエルバッハの円)の中心です。



2. 面積座標 (Barycentrics)

中心点の位置を表すのに、よく知られた直交座標 (Decartes, 1637)を用いることもできますが、以下に述べる面積座標 (Möbius, 1827)を使うと便利です。



面積座標 (u, v, w) では、三角形で中心点 P の位置を、3つの三角形の面積 S_a, S_b, S_c を使って、 $(S_a, S_b, S_c)/S$, $S_a+S_b+S_c=S$ (三角形の面積) のように表します。したがって、頂点の面積座標は、 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ になります。 P が三角形の外部にある場合、例えば、点 P が辺 BC を越えた延長上にある場合には、 S_a を負として扱えば、面積座標の定義をそのまま使うことができます。それでは、例として、先の中心点の面積座標を求めてみます。

内心 : 内接円の半径を r とすると、 $S_a = ar/2$, $S_b = br/2$, $S_c = cr/2$, $S = (a+b+c)/2$, なので、内心の面積座標は $(a, b, c)/S$ となります。ここで、 $S = a+b+c$ という記号を用いました。この記号はこれからしばしば使います。

重心 : 重心の性質から、 $S_a = S_b = S_c = S/3$ です。これは、三角形の頂点と対辺の中点を結んでできる2つの三角形の面積が等しいことから分かります。したがって、重心の面積座標は $(1, 1, 1)/3$ で与えられます。

外心 : 外接円の半径を R とすると、正弦定理から、 $S_a=R^2\sin(A)\cos(A)$, $S_b=R^2\sin(B)\cos(B)$, $S_c=R^2\sin(C)\cos(C)$ となります。したがって、外心の面積座標は $(\sin(A)\cos(A), \sin(B)\cos(B), \sin(C)\cos(C))$ で与えられます。なお、加法定理を使うと、 $(\sin(2A), \sin(2B), \sin(2C))$ のようにも表わすことができます。

垂心 : 先の垂心の説明図において、正弦定理を使うと、 $AH=2R\cos(A)$, $BH=2R\cos(B)$, $CH=2R\cos(C)$ なので、 $S_a=BH\cos(C)a/2=2R^2\cos(B)\cos(C)\sin(A)=2R^2\tan(A)/\{\cos(A)\cos(B)\cos(C)\}$ となります。ここで、 R は外接円の半径です。同様に、 $S_b=2R^2\tan(B)/\{\cos(A)\cos(B)\cos(C)\}$, $S_c=2R^2\tan(C)/\{\cos(A)\cos(B)\cos(C)\}$ なので、垂心の面積座標は $(\tan(A), \tan(B), \tan(C))$ で与えられます。

傍心 : 傍心は三角形の外にあり、傍心 I_a は、その半径を r_a とすると $S_a=-ar_a/2$, $S_b=br_a/2$, $S_c=cr_a/2$ なので、傍心 I_a の面積座標は $I_a = (-a, b, c)/(-a+b+c)$ となります。同様に、 $I_b = (a, -b, c)/(a-b+c)$, $I_c = (a, b, -c)/(a+b-c)$ となります。なお、傍心は、三角形の辺 a, b, c を入れ替えると中心が I_a, I_b, I_c と変わるので、後述する中心点の仲間からは除外されます。

3. Conway 表記

面積座標を扱う場合、Conway 表記を使うと式を簡潔に表すことができます。三角形の3つの辺の長さを a, b, c , それぞれの辺に向かい合う頂角を A, B, C で表すとき、Conway の記号 S_A, S_B, S_C は、以下のように定義されます。

$$S_A = S \cot(A) = (b^2 + c^2 - a^2)/2 = bc \cos(A)$$

$$S_B = S \cot(B) = (c^2 + a^2 - b^2)/2 = ca \cos(B)$$

$$S_C = S \cot(C) = (a^2 + b^2 - c^2)/2 = ab \cos(C)$$

$$S = 2 \times (\text{三角形の面積})$$

ここで、 S_A, S_B, S_C の右辺の2番目と3番目の等号は三角形の余弦定理そのものです。

Conway 表記では、以下のような関係が成り立ちます。

$$S_B + S_C = a^2, S_C + S_A = b^2, S_A + S_B = c^2, S_A + S_B + S_C = (a^2 + b^2 + c^2)/2$$

$$S_B S_C + S_C S_A + S_A S_B = S^2$$

1 行目の関係式は、定義から直接導けますが、2 行目の関係式は、3 角形の辺の長さ
面積の関係を表すヘロンの公式を使って証明することができます。

なお、Conway 表記を使うときには、**S** は、**三角形の面積の 2 倍**であることに注意して
ください。

つぎに、Conway 表記を使って、重心、外心、垂心の面積座標 (u, v, w) を求めてみ
ます。

$$\text{重心} : u = 1/3 = S^2/(3S^2), \quad N = u + v + w = 1$$

ここで、u の 2 番目の等式は、後の説明のために追加しました。

外心 : 三角形の正弦定理と Conway 表記の関係式を使うと、

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sin(A)\cos(A)}{\sin(A)\cos(A)} = \frac{a/(2R)}{S_A/(bc)} \\ &= \frac{1}{2R(abc)} a^2 S_A \\ &= \frac{1}{2R(abc)} S_A (S_B + S_C) \\ &= \frac{1}{2R(abc)} (S^2 - S_B S_C) \\ \frac{\sin(A)\cos(A)}{\sin(A)\cos(A)} &\equiv \sin(A)\cos(A) + \sin(B)\cos(B) + \sin(C)\cos(C) \\ &= \frac{1}{2R(abc)} (S^2 - S_B S_C + S^2 - S_C S_A + S^2 - S_A S_B) = \frac{1}{2R(abc)} (2S^2) \end{aligned}$$

となるので、外心の面積座標は Conway 表記で

$$u = (S^2 - S_B S_C)/(2S^2), \quad v = (S^2 - S_C S_A)/(2S^2), \quad w = (S^2 - S_A S_B)/(2S^2),$$

$$N = u + v + w = 1$$

となります。

$$\text{垂心} : u = \tan(A)/\tan(A) = \sin(A)/\cos(A)/\tan(A)$$

$$= \{2abcR/S_A\}/\tan(A) = \{2abcR/S_A S_B S_C\} S_B S_C / \tan(A)$$

$$\tan(A) \equiv \tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \{2abcR/S_A S_B S_C\} (S_B S_C + S_C S_A + S_A S_B)$$

$$= \{2abcR/S_A S_B S_C\} (S^2)$$

から、垂心の面積座標は

$$u = S_B S_C / S^2, v = S_C S_A / S^2, w = S_A S_B / S^2, \quad N = u + v + w = 1$$

となります。ここで、 $\tan(A) = 1/\cot(A) = S/S_A$ を使いました。

これらの結果から、一般に、オイラー線上の中心点は、Conway 表記で、

$$u = (GS^2 + HS_B S_C)/N, v = (GS^2 + S_C S_A)/N, w = (GS^2 + HS_A S_B)/N,$$

$$N = u + v + w = (3G+H)S^2$$

のよう形に表わせることが予想されます。

4. オイラー線 (Euler Line)

三角形の重心、外心、垂心などは、ひとつの直線の上にあることが知られています。この直線は著名な数学者オイラーが発見した(Euler, 1765) ので、オイラー線と呼ばれています。オイラー線を表す直線の式は、面積座標と Conway 表記を使うと簡潔に表すことができます。すなわち、一般に、面積座標(u, v, w)を通る直線の式は、

$$Pu + Qv + Rw = 0$$

の様に表されます。ここで、P, Q, R は直線を表す定数です。まず、重心 $u = 1/3, v = 1/3, w = 1/3$ および外心 $u = (S^2 - S_B S_C)/(2S^2), v = (S^2 - S_C S_A)/(2S^2), w = (S^2 - S_A S_B)/(2S^2)$ を通る直線を求めてみます。この場合、P, Q, R は以下の式を満たします。

$$P + Q + R = 0$$

$$P(S^2 - S_B S_C) + Q(S^2 - S_C S_A) + R(S^2 - S_A S_B) = 0$$

ここで、 $R = -P - Q$ を 2 番目の式に代入すると、

$$P(-S_B S_C + S_A S_B) + Q(-S_C S_A + S_A S_B) = 0$$

から、

$$P = \{S_A(S_B - S_C)/S_B(S_C - S_A)\}Q$$

となります。また、 R と Q の関係は、

$$\begin{aligned} R &= -P - Q = -\{S_A(S_B - S_C)/S_B(S_C - S_A)\}Q - Q \\ &= -\{S_A(S_B - S_C) + S_B(S_C - S_A)\}/S_B(S_C - S_A)Q \\ &= \{S_C(S_A - S_B)\}/S_B(S_C - S_A)Q \end{aligned}$$

なので、先の直線の式に代入すると、直線の式は、

$$\{S_A(S_B - S_C)/S_B(S_C - S_A)\}Qu + Qv + \{S_C(S_A - S_B)\}/S_B(S_C - S_A)Q = 0,$$

すなわち、

$$S_A(S_B - S_C)u + S_B(S_C - S_A)v + S_C(S_A - S_B)w = 0$$

となります。確認のため、垂心がこの直線上にあるかどうか調べてみます。垂心の面積座標 $u = S_B S_C / S^2$, $v = S_C S_A / S^2$, $w = S_A S_B / S^2$ でしたので、これらを直線の式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= [S_A(S_B - S_C)(S_B S_C) + S_B(S_C - S_A)(S_C S_A) + S_C(S_A - S_B)(S_A S_B)] / (S^2) \\ &= [S_A S_B S_C \{(S_B - S_C) + (S_C - S_A) + (S_C - S_A)\}] = [S_A S_B S_C(0)] = 0 \end{aligned}$$

となります、したがって、先の直線の式は、この直線上に重心、外心および垂心がのっている、オイラー線を表す式であることが分かります。

なお、中心がオイラー線上にあるかどうかを調べる際には、中心点の面積座標の分母は関係がないことが分かります。そのため、後述する中心点をまとめた **Encyclopedia of Triangle Centers**(以下、ETC と略します)に記載されている中心点の面積座標 $(f(a,b,c), f(b,c,a), f(c,a,b))$ では、 $f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b) = 1$ の条件を満たしていません。とくに、 $f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b) = 1$ を満たす面積座標を絶対面積座標と呼ぶ場合があります。

5. オイラー線上の中心点と品川係数 (S-Coefficients)

オイラー線上の中心点である重心、外心、垂心の面積座標は、Conway の記号で

$$u = (GS^2 + HS_B S_C)/N, \quad N = (3G+H)S^2$$

のような形で表されるとします。先の結果から、重心、外心、垂心の面積座標は

$$\text{重心} : G = 1/3, H=0, N = S^2,$$

$$\text{外心} : G = 1, H = -1, N = 2S^2,$$

$$\text{垂心} : G = 1, H = 1, N = 4S^2,$$

となります。この関係式を一般化して、オイラー線上の中心点 (u, v, w) の面積座標が

$$u = \{G(a,b,c)S^2 + H(a,b,c)S_B S_C\}/N,$$

$$v = \{G(a,b,c)S^2 + H(a,b,c)S_C S_A\}/N,$$

$$w = \{G(a,b,c)S^2 + H(a,b,c)S_A S_B\}/N,$$

$$N = \{3G(a,b,c) + H(a,b,c)\}S^2$$

のように表わせるとします。ここで、 $G(a,b,c)$ および $H(a,b,c)$ は、**三角形の辺の長さ a, b, c の関数で、 a, b, c をサイクリックに入れ替えても変わらない対称関数である**としました。対称関数としては、例えば、 $S_a \equiv a+b+c$, $S_{bc} \equiv bc+ca+ab$, abc 、 S_A, S_B, S_C の**多項式**で表せる対称関数では、基本対称関数 $S_A + S_B + S_C = E + F$, $S_B S_C + S_C S_A + S_A S_B = S^2$, $S_A S_B S_C = FS^2$ で定義される E, F で表せます。上記の関係式で表された中心点が、実際に、オイラー線上にあることを、先のオイラー線の式から確かめてみましょう。

オイラー線の式の左辺は、

$$\begin{aligned}
 & S_A(S_B - S_C)u + S_B(S_C - S_A)v + S_C(S_A - S_B)w \\
 &= \{S_A(S_B - S_C) + S_B(S_C - S_A) + S_C(S_A - S_B)\}G(a,b,c)S^2 \\
 &\quad + S_A S_B S_C \{(S_B - S_C) + (S_C - S_A) + (S_A - S_B)\}H(a,b,c) \\
 &= \{0\}G(a,b,c)S^2 + S_A S_B S_C \{0\}H(a,b,c) = 0
 \end{aligned}$$

となるので、確かにオイラー線上の中心点であることが分かります。

これらの式に現れる $G(a,b,c)$ と $H(a,b,c)$ は、品川係数 (Shinagawa Coefficients, 以下 S -係数と省略します) と呼ばれています。ETC では、中心点の S -係数は $(G(a,b,c), H(a,b,c))$ のようにカッコ付で記載されています。

先の三角形の5心では、

内心 $X(1)$: $u(1) = a/S_A = (0)S^2 + (0)S_B S_C + a/S_A$ から、 $K(a,b,c) \equiv a/S_A \neq 0$ なので、オイラー線上にはありません。

重心 $X(2)$: $u(2) = (S^2)/(3S^2) = (1, 0)/(S^2)$ から S -係数は、**(1, 0)**。

外心 $X(3)$: $u(3) = (S^2 - S_B S_C)/(2S^2) = (1, -1)/(2S^2)$ から S -係数は、**(1, -1)**。

垂心 $X(4)$: $u(4) = (S_B S_C)/(S^2) = (0, 1)/(S^2)$ から S -係数は、**(0, 1)**。

9点中心 $X(5)$: 外心と垂心の midpoint なので、

$$u(5) = \{u(3) + u(4)\}/2 = \{(1, -1)/(2S^2) + (0, 1)/(S^2)\}/2 = (1, 1)/(4S^2)$$

から S -係数は、**(1, 1)** となります。

なお、各中心の名前の後にある記号 $X(*)$ は Encyclopedia of Triangle Centers で使われている中心点(*)を表すものです。このように、 S -係数を使うと中心点の面積座標を簡潔に表すことができます。

Prof. C. Kimberling がインターネットで主宰している “Encyclopedia of Triangle Centers(ETC)”の公式サイト (<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>)

には、内心のようなオイラー線上にない中心点を含めて現在、約 25,000 の中心点が登録されています。そのうちの 1 割程度の中心点がオイラー線上にのる中心点であると思われる。

なお、S-係数は、ETC の Introduction で以下の様に紹介されています。

Introduced on March 21, 2015: Shinagawa coefficients for triangle centers on the Euler line

Suppose that X is a triangle center given by barycentric coordinates $f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$. The Shinagawa coefficients of X are the functions $G(a,b,c)$ and $H(a,b,c)$ such that

$$f(a,b,c) = G(a,b,c) \cdot S^2 + H(a,b,c) \cdot S_B S_C.$$

For many choices of X , $G(a,b,c)$ and $H(a,b,c)$ are conveniently expressed in terms of the following:

$$E = (S_B + S_C)(S_C + S_A)(S_A + S_B)/S^2, \text{ so that } E = (abc/S)^2 = 4R^2$$

$$F = S_A S_B S_C / S^2, \text{ so that } F = (a^2 + b^2 + c^2)/2 - 4R^2 = S_\omega - 4R^2$$

Examples:

$X(2)$ has Shinagawa coefficients $(1, 0)$; i.e., $X(2) = 1 \cdot S^2 + 0 \cdot S_B S_C$

$X(3)$ has Shinagawa coefficients $(1, -1)$

$X(4)$ has Shinagawa coefficients $(0, 1)$

$X(5)$ has Shinagawa coefficients $(1, 1)$

$X(23)$ has Shinagawa coefficients $(E + 4F, -4E - 4F)$

$X(1113)$ has Shinagawa coefficients $(R - |OH|, -3R + |OH|)$

A cyclic sum notation, $\$...\$, is introduced here especially for use with Shinagawa coefficients. For example, $\$a S_B S_C\$$ abbreviates $a S_B S_C + b S_C S_A + c S_A S_B$.$

Example: $X(21)$ has Shinagawa coefficients $(\$a S_A \$, abc - \$a S_A \$)$

If a point X has Shinagawa coefficients (u, v) where u and v are real numbers (i.e, G(a,b,c) and H(a,b,c) are constants), then the segment joining X and X(2) is giving by $|GX| = 2v|GO|/(3u + v)$, where $|GO| = (E - 8F)^{1/2}/6$. Then the equation $|GX| = 2v|GO|/(3u + v)$ can be used to obtain these combos:

$$X = [(u + v)/2]*X(2) - (v/3)*X(3)$$

$$X = u*X(2) + (v/3)*X(4)$$

$$X = u*X(3) + [(u + v)/2]*X(4).$$

The function F is also given by these identities:

$$F = (4R^2 - 36|GO|^2)/8 \text{ and } F = R^2(1 - J^2)/2, \text{ where } J = |OH|/R.$$

この紹介の最後の方に記載されているように、重心、外心、垂心など S-係数(u, v) が定数である中心点 X と重心 G との距離 |GX| と外心 O と重心 G との距離 |GO|との間には、

$$|GX| = 2v|GO|/(3u + v)$$

なる関係式が成り立ちます。すなわち、|GX|は|GO|に比例することが分かります。この関係式を使うと、以下の様な比例関係を証明できます。すなわち、先の S-係数を使うと、重心 G と 9 点中心 N、重心 G と垂心 H では、

$$|GN| = (1/2)|GO|, \quad |GH| = 2|GO|$$

から、

$$|GO| : |GH| : |GN| = |GO| : 2|GO| : |GO|/2 = 2 : 4 : 1$$

となります。この例のように、S-係数が定数で与えられる中心点(ETC では、現在このような中心点、約 150 登録されています)の間では、中心点間の距離の関係が同様な整数比で与えられることとなります。

なお、オイラー線上にない中心点の面積座標は、内心の面積座標が

$$u(1) = a/S_a = (0)S^2 + (0)S_B S_C + a/S_a$$

で表されているように、一般に、

$$u = G(a,b,c)S^2 + H(a,b,c)S_B S_C + K(a,b,c)$$

$G(a,b,c), H(a,b,c)$: 対称関数

$K(a,b,c)$: 非対称関数

$$N = \{3G(a,b,c)+H(a,b,c)\}S^2 + \{K(a,b,c)+K(b,c,a)+K(c,a,b)\}$$

の様に表示すると予想されます。

ここで、

$$K \equiv S_A(S_B - S_C)K(a,b,c) + S_B(S_C - S_A)K(b,c,a) + S_C(S_A - S_B)K(c,a,b)$$

とすると、オイラー線上にない中心点(u, v, w)は、以下の直線の式

$$S_A(S_B - S_C)u + S_B(S_C - S_A)v + S_C(S_A - S_B)w = K$$

を満たします。この直線の式は、オイラー線を K だけ平行移動した直線に相当するので、 K はオイラー線からの距離に比例します。この K については、後述する **Euler Coordinates** (オイラー座標)のところでもう一度説明します。

先の "Encyclopedia of Triangle Centers" では、オイラー線上にある中心点には、 S -係数が付記されています。例えば、中心点 $X(12225)$ では

$X(12225) = \text{ORTHOLOGIC CENTER OF THESE TRIANGLES: 1st ANTI-CIRCUMPERP TO MACBEATH}$

Barycentrics $2a^{10}-3(b^2+c^2)a^8-2(b^4-b^2c^2+c^4)a^6+4(b^6+c^6)a^4-2(b^2-c^2)^2b^2c^2a^2$

$-(b^4-c^4)(b^2-c^2)^3 : :$

• • • •

As a point of the Euler line, X(12225) has Shinagawa coefficients: (E+2F, -2E-6F)

のように記載されています。ここで、 a, b, c は三角形の辺の長さで、” Barycentrics” は中心点の面積座標で、 a, b, c に関する 10 次の多項式で表わされています(ここでは、 $u = f(a, b, c)$ のみが与えられおり、 v, w は a, b, c をサイクリックに入れ替えれば求まるので::の記号で省略されています)。この中心点の S-係数は、先の S-係数の紹介の中で定義された E, F という 2 つの変数を使って $(E+2F, -2E-6F)$ のように簡潔に表されています。なお、中心点の S-係数は、後述する中心点の間の関係式を求める場合に有用となります。

6. ETC の Tables

ETC には、数多くの中心点の S-係数が Tables としてまとめられています。各テーブルについて、簡単に説明します。

・テーブル S-Coefficients (Euler Line ++) と S-Coefficients (Euler Line +-)

このテーブルでは、オイラー線上にない 2 つの中心点について、それらの内分点(++) や外分点(+-)がオイラー線上にのっている中心点の S-係数をまとめています。オイラー線上にない 2 つの中心点の面積座標を

$$u_1 = G_1(a,b,c)S^2 + H_1(a,b,c)S_B S_C + K_1(a,b,c)$$

$$N_1 = \{3G_1(a,b,c)+H_1(a,b,c)\}S^2 + K_1(a,b,c)+K_1(b,c,a)+K_1(c,a,b)\}$$

$$u_2 = G_2(a,b,c)S^2 + H_2(a,b,c)S_B S_C + K_2(a,b,c)$$

$$N_2 = \{3G_2(a,b,c)+H_2(a,b,c)\}S^2 + \{K_2(a,b,c)+K_2(b,c,a)+K_2(c,a,b)\}$$

とします。ここで、 $K_1(a,b,c)$ 、 $K_2(a,b,c)$ は、オイラー線からの距離に関係し、符号によって、オイラー線の正の側あるいは負の側になります。したがって、 N_1 と N_2 が比例関係にあれば、2 つの中心点の内分点($K_1 K_2 < 0$)あるいは外分点($K_1 K_2 > 0$)からオイラー線上の中心点を求めることができます。例えば、オイラー線上にない中心点のひとつを内心 X(1)

$$u(1) = [aS^2]/N, \quad N = aS^2$$

として、ETC から同じタイプ、すなわち、 aS^2 に比例する N もつ $X(3621)$ と $X(3244)$ を選ぶことにします。ETC では、これらの中心点は、以下の様に記載されています。

$X(3621) = H(X(8); M, 2)$

Trilinears $f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$, where $f(a,b,c) = bc(5a - 3b - 3c)$

Barycentrics $5a - 3b - 3c : 5b - 3c - 3a : 5c - 3a - 3b$

....

$X(3244) = \text{REFLECTION OF } X(10) \text{ IN } X(1)$

Trilinears $f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$, where $f(a,b,c) = bc(4a - b - c)$

Barycentrics $4a - b - c : 4b - c - a : 4c - a - b$

....

ここで、"Trilinears" は、中心点の座標を 3 つの面積で表す代わりに中心点から各辺までの距離 h_a, h_b, h_c で表わす三線座標 (h_a, h_b, h_c) と呼ばれる座標です。面積座標とは、 $S_a = ah_a/2, S_b = bh_b/2, S_c = ch_c/2$ の関係にあるので、座標の間の変換は簡単です。

これらの中心点の面積座標は、

$$u(3621) = [3aS^2 - 8aS^2]/N, \quad N = aS^2$$

$$u(3244) = [-aS^2 + 5aS^2]/N, \quad N = 2aS^2$$

のように表わせるので、 $X(3621)$ はオイラー線に関して内心と逆側 (aS^2 の係数の符号が内心と反対) にあり、 $X(3244)$ は内心と同じ側 (aS^2 の係数が内心と同符号) にあります。これらの 3 つの中心点から、 aS^2 の項を消去した内分点、外分点として、以下の関係式を導くことができます。

$$\{8u(1) + u(3621)\}/9 = \{8aS^2/(aS^2) + (3aS^2 - 8aS^2)/(aS^2)\}/9 = 1/3 = u(2)$$

$$\{5u(1) - 2u(3244)\}/3 = [5a^2/(a^2) - 2(-a^2+5a^2)/(2a^2)]/3 = 1/3 = u(2)$$

すなわち、X(1)と X(3621)の 1 : 8 の内分点、X(3244)と X(1)の 5 : 2 の外分点は、ともに重心 X(2) に一致することが分かります。これらの関係は、X(2) = {8(1) + (3244)} として、テーブル” S-Coefficients (Euler Line ++)” に、また、X(2) = {5(1) - 2(3244)} として、テーブル” S-Coefficients (Euler Line +-)” の表に載っています。これらの表には、同様な関係の例が多数まとめられています。

・ テーブル ”S-Coefficients, Midpoints on Euler Line I”

このテーブルでは、オイラー線上にない 2 つの中心点の midpoint がオイラー線上にある場合の中心点をまとめています。先の例と同様に、中心点の 1 つを内心 X(1)として、同じ N = a^2 タイプをもちオイラー線の逆側にある X(3679)で説明します。ETC では、X(3679)は以下の様に与えられています。

$$X(3679) = X(3576)_{com}(EXTOUCH TRIANGLE)$$

Barycentrics $a - 2b - 2c ::$

.....

X(3679)の面積座標は

$$u(3621) = [2a^2 - 3a^2]/N, \quad N=3a^2$$

なるので、その midpoint は

$$\begin{aligned} \{u(1)+u(3679)\}/2 &= [a^2/(a^2)+(2a^2 - 3a^2)/(3a^2)]/2 \\ &= [3a^2 + 2a^2 - 3a^2]/(6a^2) = 1/3 = u(2) \end{aligned}$$

となります。すなわち、X(1)と X(3679)の midpoint が重心 X(2) になります。テーブルでは、X(2) = (1, 3679) として記載されています。ここで、右辺の () は、テーブルで使われている midpoint を表す記号です。一般に、X(1)と X(3679)のように、オイラー線を

挟んで等距離にある2つの中心点の中心はオイラー線上にあるので、そのような例がテーブル”S-Coefficients, Midpoints on Euler Line I” にまとめられています。

・ テーブル ”S-Coefficients, Midpoints on Euler Line II”

このテーブルには、オイラー線上の2つの中心点の中心がまとめられています。先の中心点 X(12225)を例にして説明します。X(12225)の面積座標は、

$$u(12225) = [(E+2F)S^2 + (-2E-6F)S_B S_C] / N, \quad N = \{3(E+2F) + (-2E-6F)\}S^2 = ES^2$$

なので、同じ $N = ES^2$ タイプの X(3575)を例に取り上げます。ETC には、以下のように記載されています。

X(3575) = EULER LINE INTERCEPT OF THE LINE X(64)X(66)

Barycentrics $[2a^6 + b^6 + c^6 - 3a^4b^2 - 3a^4c^2 - b^4c^2 - b^2c^4] / (b^2 + c^2 - a^2) ::$

....

As a point on the Euler line, X(3575) has Shinagawa coefficients $(-F, E + 3F)$.

....

したがって、X(3575)の面積座標は、

$$u(3575) = [-FS^2 + (E+3F)S_B S_C] / N, \quad N = ES^2$$

であり、同じ ES^2 タイプとなります。X(12225)と X(3575)の中心は、

$$\{u(3575) + u(12225)\} / 2$$

$$= \{[-FS^2 + (E+3F)S_B S_C] / (ES^2) + \{(E+2F)S^2 + (-2E-6F)S_B S_C\} / (ES^2)\} / 2$$

$$= \{(E+F)S^2 + (-E-3F)S_B S_C\} / (2ES^2) = u(12362)$$

となります。このS-係数をもつ中心点は、以下の X(12362)であることが分かります。

X(12362) = ORTHOLOGIC CENTER OF THESE TRIANGLES: 6th ANTI-MIXTILINEAR TO MACBEATH

Barycentrics $a[6\cos(A)\cos(B-C)-\cos\{2(B-C)\}-2\cos(2A)+1]\cos(A) : :$

....

As a point on the Euler line, X(12362) has Shinagawa coefficients: (E+F, -E-3*F).

....

すなわち、X(12362) = (3575, 12225)の関係が成り立ちます。X(12362)は、このテーブルを作成した時点でまだ登録されていない中心点でしたので、” S-Coefficients, Midpoints on Euler Line II” のテーブルには載っていませんが、テーブルには、このようなオイラー線上の2つの中心点の midpoint の S-係数がまとめられています。

ETC の Tables では、それ以外に S-係数に関係しない2つのテーブルがあります。その1つは、以下のものです。

• テーブル ” Midpoints Not on Euler Line”

このテーブルでは、いずれの中心点もオイラー線上にない場合の midpoint の関係がまとめられています。例えば、内心 X(1) とオイラー線上にない先の中心点 X(3244) の midpoint は

$$\begin{aligned} \{u(1) + u(3244)\}/2 &= [aS^2/(\$a\$S^2) + (-\$a\$S^2 + 5aS^2)/(2\$a\$S^2)]/2 \\ &= (-\$a\$S^2 + 7aS^2)/(4\$a\$S^2) = u(3635) \end{aligned}$$

となります。ここで、X(3635)は、オイラー線上にない以下の中心点です。

X(3635) = H⁻¹(X(10); M, -1/2)

Trilinears $f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$, where $f(a,b,c) = bc(6a - b - c)$

Barycentrics $6a - b - c : 6b - c - a : 6c - a - b$

.....

また、内心 $X(1)$ と先の $X(3621)$ の中点は

$$\{u(1) + u(3621)\}/2 = [aS^2/(S^2) + (3aS^2 - 8a^2)/(S^2)]/2$$

$$= (3aS^2 - 7a^2)/(2aS^2) = u(3625)$$

となります。ここでも、 $X(3625)$ はオイラー線上にない以下の中心点です。

$$X(3625) = H^{-1}(X(1); M, -1/2)$$

Trilinears $f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$, where $f(a,b,c) = bc(4a - 3b - 3c)$

Barycentrics $4a - 3b - 3c : 4b - 3c - 3a : 4c - 3a - 3b$

.....

これらの関係は、 $X(3625) = (1, 3621)$, $X(3635) = (1, 3244)$ としてテーブルに載っています。このテーブルでは、 N のタイプ別に中点がまとめられています。

ETC の最後のテーブルは、これまでのテーブルとは異質のものです。

• Euler Coordinates

これまで、中心点を面積座標 $(f(a,b,c), f(b,c,a), f(c,a,b))$ で表してきましたが、中心点の位置を直感的に分かりやすく表示するために、中心点の座標をオイラー線を x -軸、オイラー線に垂直な直線を y -軸とする直交座標 (x, y) で表わそうというものです。オイラー線に垂直な直線は、一般に、

$$S_A u + S_B v + S_C w = k$$

のように表わせます。この直線がオイラー線と直交することは、2つの直線の直交条件から確かめることができます。とくに、オイラー線上の中心点 $X(468)$ の面積座標は

X(468) = X(2)-LINE CONJUGATE OF X(3)

Trilinears $(\sec A)(\cot B + \cot C - 2 \cot A) : :$

Trilinears $\sec A - 3 \csc A \tan \omega : :$

Trilinears $3 \csc A - \sec A \cot \omega : :$

Barycentrics $(b^2 + c^2 - 2a^2)/(b^2 + c^2 - a^2) : :$

X(468) = 3X(2) + X(23)

As a point on the Euler line, X(468) has Shinagawa coefficients (3F,-E - F).

.....

$$u(468) = \{3FS^2 - (E+F)S_B S_C\} / (8F-E)$$

で与えられるので、

$$S_A u + S_B v + S_C w$$

$$= [S_A \{3FS^2 - (E+F)S_B S_C\} + S_B \{3FS^2 - (E+F)S_B S_C\} + S_C \{3FS^2 - (E+F)S_A S_B\}] / (8F-E)$$

$$= \{3(E+F)F - 3(E+F)F\} S^2 = 0$$

となります。この X(468) を通りオイラー線に直交する直線は、**orthic axis** と呼ばれています。この軸を x 軸に原点に選んだ座標系を **Euler coordinates** (オイラー座標) と命名しました(一般には、まだ認知されていませんが)。

したがって、オイラー座標で表した中心点 (x_e, y_e) は、これまでの (u, v, w) から以下のように定義します。

$$x_e = S_A u + S_B v + S_C w$$

$$y_e = -\{S_A(S_B - S_C) u + S_B(S_C - S_A) v + S_C(S_A - S_B) w\}$$

ここで、orthic axis からの符号を含めた距離を d とすると、 $x_e = (E-8F)^{1/2}d$ 、また、オイラー線からの符号を含めた距離を d' とすると、 $y_e = (E-8F)^{1/2}Sd'$ となります。ここで、 y_e の符号を負にした理由は、内心 $X(1)$ が orthic axis の正の側になるように選んだためです。

さらに、先の様に中心点の面積座標($f(a,b,c)$, $f(b,c,a)$, $f(c,a,b)$)を、

$$f(a,b,c) = G(a,b,c)S^2 + H(a,b,c)S_B S_C + K(a,b,c)$$

$G(a,b,c)$, $H(a,b,c)$: a,b,c に関する対称関数

$K(a,b,c)$: a,b,c に関する非対称関数

$$N = \{3G(a,b,c) + H(a,b,c)\}S^2 + \{K(a,b,c) + K(b,c,a) + K(c,a,b)\}$$

とすると、

$$x_e = \{[(E+F)G + 3FH]S^2 + K(a,b,c)\} / N,$$

$$y_e = -S_A(S_B - S_C)K(a,b,c) / N,$$

$$N = (3G + H)S^2 + K(a,b,c)$$

となります。ここで、 y_e は $f(a,b,c)$ に現れる $K(a,b,c)$ に関係しています。とくに、オイラー線上の中心点では、 $K(a,b,c) = 0$ なので、 S -係数 (G, H) を用いて表せます。すなわち、

$$x_e = \{(E+F)G + 3FH\}S^2 / N,$$

$$y_e = 0,$$

$$N = (3G + H)S^2$$

例えば、重心、外心、垂心、9点中心のオイラー座標は、

$$X(2) = ((E+F)/3, 0),$$

$$X(3) = ((E-2F)/2, 0),$$

$$X(4) = (3F, 0),$$

$$X(5) = (E+4F)/4, 0)$$

なので、重心(G)と、外心(O)、垂心(H)、9点中心(N)の距離は、

$$GO = (E-2F)/2 - (E+F)/3 = (E-8F)/6,$$

$$GH = 3F - (E+F)/3 = -(E-8F)/3,$$

$$GN = (E+4F)/4 - (E+F)/3 = -(E-8F)/12$$

となり、オイラー線上には、垂心、9点中心、重心、外心の順に並び、

$$|GO| : |GH| : |GN| = 1/6 : 1/3 : 1/12 = 2 : 4 : 1$$

となります。この結果は、先に述べた結果に一致します。

オイラー線上にない中心点、例えば、フェルマー点 X(13)のグループでは、テーブルから、オイラー線までの距離がフェルマー点に等しい(y_e が同じ)中心点は、

$$X(15), X(396), X(618), X(5318), X(5463), X(11542)$$

であり、これらの中心点は、フェルマー点を通りオイラー線に平行な直線上にあることが分かります。また、オイラー線を挟んでフェルマー点の逆側にある(y_e の符号が逆)中心点は、

$$X(5473), X(5617), X(14539)$$

であり、これらの中心点は、オイラー線を挟んで先のフェルマー点を通る直線に平行な直線上にあります。前者の中心点と後者の中心点との中点は、オイラー線上にあるので、例えば、

$$(13, 5463) = X(3), (13, 5617) = X(4), (13, 14539) = X(*)$$

の関係が得られます。これらの関係のうち前の2つはテーブル”S-Coefficients, Midpoints on Euler Line I” に載っていますが、最後の X(*) は、ETC には、まだ未登録の中心点です。同様に、2つの中心点のオイラー座標の内分点、外分点から、テーブル S-Coefficients (Euler Line ++) や S-Coefficients (Euler Line +-) に掲載された関係を導くこともできます。

まとめ

三角形の重心、垂心、外心の位置を面積座標で表し、Conway の記号を使うと、それらの位置を2つの係数を伴う式で表せることを示しました。例えば、重心、垂心、外心の2つの係数は、それぞれ、 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$ となります。また、重心、垂心、外心を通る直線の式としてオイラー線を表す式を導きました。このオイラー線の式から、オイラー線上の中心点の面積座標が、一般に、対称関数 $G(a, b, c)$, $H(a, b, c)$ を用いた2つの係数 $(G(a, b, c), H(a, b, c))$ で表わることが分かりました。米国のエバンスビル大学の Prof. Kimberling による三角形の中心点をまとめたインターネットサイト” **Encyclopedia of Triangle Centers**” (ETC) では、これらの2つの係数 $(G(a, b, c), H(a, b, c))$ は、品川係数(S-係数)と呼ばれ、オイラー線上の中心点を表すのに使われています。また、ETC の **Tables** には、数多くのS-係数の例がまとめられています。ここで、重心、垂心、外心のようにS-係数が定数で表せるような中心点では、中心点間の距離が整数比で表わせることが分かりました。三角形の内心のように、オイラー線上にない中心点の面積座標は、対称関数からなる2つの係数 $G(a, b, c)$, $H(a, b, c)$ の項に加えて非対称関数 $K(a, b, c)$ の項で表せます。これらの面積座標の表式は、中心点間の関係を求めるのに便利な表式で、いくつかの例を本文中に記載しました。最後に、オイラー線を x-軸、オイラー線に垂直な直線を y-軸とする直交座標で中心点の位置を表す **Euler Coordinates** (オイラー座標) を提案しました。この座標から、 $K(a, b, c)$ がオイラー線から中心点までの距離に関係していることを示しました。