折り紙の幾何学 (3)　　　品川公成

― マス目折りの折り線に平行に折る ―

本稿では、マス目折りの折り線に平行な折り線で折る折り方を調べます。この折り方では、図 1 (a) のように A’が折り紙の外側に出る折り方と図 1(b)のように A’が折り紙の内側に入る折り方があります。

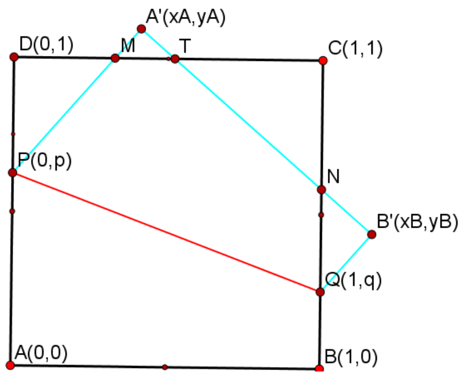

図 1 (a)　A’が折り紙の外側に出る折り方

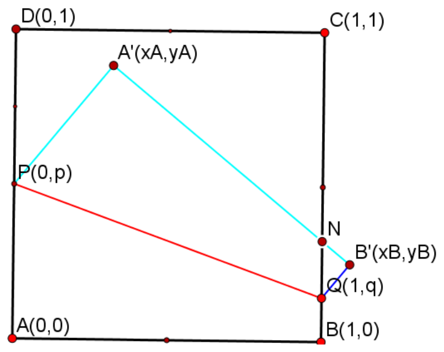

図 1 (b)　A’が折り紙の内側に入る折り方

これまでと同様に、図 1 (a)と図 1 (b)のように、折り紙の 4 隅を直交座標(x, y)で A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1)および D(0, 1)、折り線(赤線)の端点を P(0, p)、Q(1, q), $0 \le q < p \le 1$ とし、折り線を{p, q}で表わします。また、折った状態(青線)での隅 A, B の位置を A’, B’、折った状態での辺と元の辺との交点を図の様に表します。

はじめに、3✕3 マス目折りの折り線に平行な折り線で折る折り方を調べます。

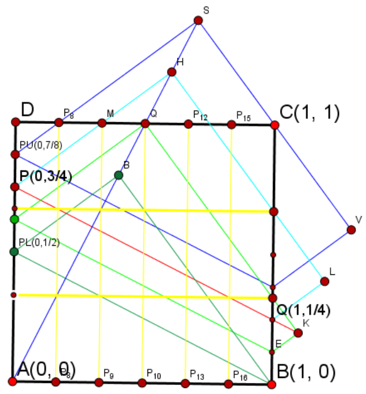

図２　3✕3 マス目折りの折り線に平行な折り線で折る

図２の赤線で示すように、3✕3 マス目折りの折り線は、辺 DA 上に端点 P(0, 3/4)をもつ{3/4, 1/4}です。辺 A'B'が C(1,1)を通る折り線は、図２の青線で示した辺 DA 上に端点 PU(0, 7/8)[付録１)]をもつ{7/8, 3/8}になります。また、隅 B を通り赤線に平行な折り線は､図の緑色の線で示した辺 DA 上に端点 PL(0, 1/2)をもつ{1/2, 0}となります。この２つの端点 PU と PL との間に端点をもち、赤線に平行な折り線で折ると、辺 A'B'と辺 BC との交点は、隅 C から隅 B までの辺 BC 上にのります。そこで、辺 DA 上の端点 PU と PL の間を 3 等分、すなわち、(7/8-1/2)/3 = 1/8 の間隔をもつ４つの折り線{7/8, 3/8}, {3/4, 1/4}, {5/8, 1/8}および{1/2, 0}を考えます。これらの 4 つの折り線で折ると、図２に示したように、辺 A'B'と辺 BC との交点は、辺 BC の両端と図で黄色の線で示した辺 BC を３等分した２つの点になります。ここで、折り線{3/4, 1/4}は 3✕3 マス目折りの折り線なので、折り線{5/8, 1/8}が辺 BC を３分割する新しい折り線になります。さらに、PU と PL の間を 6 等分、すなわち、折り線の間隔を 1/16 にした端点をもつ３つの折り線{13/16, 5/16}, {11/16, 3/16}および{9/16, 1/16}で折ると、辺 BC を 6 等分することが可能です。これを繰り返せば、さらに細かく分割された折り線ができますが、折り紙を折るには実用的ではないので省略します。また、この折り方では、折り線{7/8, 3/8}で折ると、図１(a)の MD = 1/6 [付録２)]となるので、図２の黄色の縦線で示したように横方向を 6 分割することが可能です。

つぎに、この折り方を 5✕5 マス目折りの折り線{5/8, 3/8}で調べてみます。3✕3 マス目折りの場合と同様に、辺 A'B'が隅 C を通る折り線の辺 DA 上の端点は PU(0, 23/32)[付録１)]となります。また、赤線に平行で隅 B を通る折り線の辺 DA 上の端点は PL(0, 1/4)となります。この２つの端点 PU と PL との間に端点をもつ折り線で折ると、辺 A'B'と辺 BC との交点はすべて辺 BC 上にのります。この状況を図３に示します。

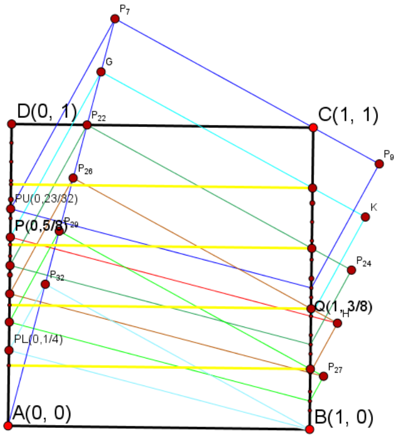

図３　5✕5 マス目折りの折り線(赤線)に平行な折り線で折る

ここで、この２つの端点PUとPLの間を５等分、すなわち、(23/32 - 1/4)/5 = 15/32 の間隔で辺 DA 上に端点をもつ６つの折り線、{23/32,15/32}, {5/8,3/8},{17/32, 9/32}, {7/16, 3/16},{11/32, 3/32}および{1/4, 0}を考えます。これらの折り線で折ると、図３に示すように、辺 A’B’と辺 BC との交点は、辺 BC の両端および図の黄色の横線で示した辺 BC を５等分する４つの点になります。すなわち、{5/8,3/8},{17/32, 9/32}, {7/16, 3/16}および{11/32, 3/32}の４つの折り線で折れば、辺 BC を５分割できることになります。さらに、PU と PL の間を 10 等分する端点をもつ折り線を使うと、辺 BC を 10 等分する点が求まりますが、折り紙を折る上では実用的でないので省略します。

なお、この折り方では、折り線の辺 DA 上の端点が細かすぎるので、図４に示すように、先の折り線の上限の代わりに、辺 DA 上に端点 PU(0, 11/16)をもつ折り線を選ぶこともできます。

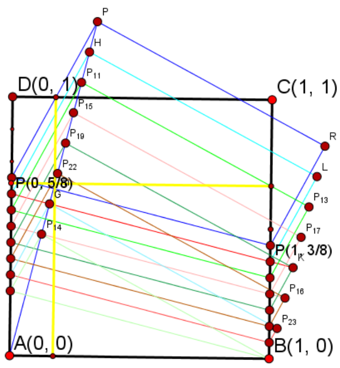

図４　5✕5 マス目折りの折り線に平行な折り線で折る
(折り線の上限を変える)

この折り線は{11/16, 7/16}で、隅 B を通る折り線は、図３と同じ{1/4, 0}となるので、この場合の折り線は、辺 DA 上に 1/16 の間隔をもつ８つの折り線{11/16, 7/16}, {5/8, 3/8}, {9/16, 5/16}, {1/2, 1/4}, {7/16, 3/16}, {3/8, 1/8}, {5/16, 1/16}および{1/4, 0}になります。これらの折り線で折ると、折り線{11/16, 7/16}では、図 1 (a)の MD = 1/6 [付録 2)]となるので、図の黄色の縦線で示すように、辺 CD を６等分することができます。また、折り線{9/16, 5/16}では、図 1 (a)の CN = 1/3 [付録 2)]となるので、黄色の横線で示すように、辺 BC を３分割できます。

図２と図３で示した折り方は、一般的に、(2n+1)✕(2n+1)マス目折りの場合に拡張することができます。この場合、辺 A'B'上に隅 C がのる折り線の辺 DA の端点は PU(0, $(4n^2+4n-1)/(8n^2)$)[付録 1)]となります。また、隅 B を通る折り線の端点は PL(0, 1/(2n))となります。この２つの端点 PU と PL の間を(2n+1)等分した間隔、$\{(4n^2+4n-1)/(8n^2)-1/(2n)\}/(2n+1) = (4n-1)/\{8n2(2n+1)\}$の端点をもつ折り線を考えると、マス目折りの折り線よりも上側の折り線は、$\{(4n^2+4n-1)/(8n^2), (4n^2-1)/(8n^2)\}$、下側の 2n 本の折り線では、$\{[4n^2+2(2-m)n+m-1]/(8n^2), (4n^2-2mn+m-1)/(8n^2)\}$, m = 1,… 2n となります。これらの(2n+1)本の折り線で折れば、辺 A'B'と辺 BC の(2n+1)個の交点は、(2n+1)分割点になります。しかし、折り紙を折る上では、n > 3 の折り線は実用的ではありません。

以上の結果から、マス目折りに平行に折る折り方で実用的に使える範囲内で折り紙の辺を３～６分割できる折り線を表１にまとめました。

表１ 折り紙の辺を３～６等分できる折り線*

辺の分割	折り線
縦 3 分割	{5/8, 1/8}, {9/16, 5/16}
縦 5 分割	{7/16, 3/16}
縦 6 分割	{13/16, 5/16}, {11/16, 3/16}, {9/16, 1/16}
横 6 分割	{7/8, 3/8}, {11/16, 7/16}

*マス目折りの折り線は除いています。

付録１　上限の折り線の辺 DA 上の端点 PU(0, p)を求める。

端点 PU(0, p)を通る折り線は、その傾きが - 1/(2n) なので、

$$y = - \{1/(2n)\}\ x + p \tag{1}$$

で与えられます。A'(x_A, y_B)とすると、(x_A/2, y_B/2) は折れ線上にあるので、

$$y_A/2 = - \{1/(2n)\}(x_A/2) + p \quad \rightarrow \quad 2ny_A = -x_A +4np \tag{2}$$

また、AA'の傾きが折り線に直交するので、

$$(y_A/x_A) = 2n \quad \rightarrow \quad y_A = 2nx_A \tag{3}$$

式(1)と式(2)から、x_A, y_A は、以下の様に与えられます。

$$x_A = 4np/(4n^2+1), \quad y_A = 8n^2p/(4n^2+1) \tag{4}$$

PU(0, p)と A'を通る直線の傾きは

$$\{8n^2p/(4n^2+1) - p\}/\{4np/(4n^2+1)\} = (4n^2 - 1)/(4n) \tag{5}$$

なので、A'と C(1,1)を通る直線は、直交条件から、その傾き m は

$$m = -4n/(4n^2 -1) \tag{6}$$

なので、

$$\begin{aligned} y &= \{-4n/(4n^2-1)\}\{x - 4np/(4n^2+1)\}+ 8n^2p/(4n^2+1) \\ &= \{-4n/(4n^2-1)\}x + 8n^2p/(4n^2-1) \end{aligned} \tag{7}$$

となります。ここで、この直線が C(1, 1)を通るとすると、

$$1 = \{ - 4n/(4n^2-1) + 8n^2p/(4n^2-1)\} \quad \rightarrow \quad p = (4n^2 + 4n - 1)/(8n^2) \tag{8}$$

となります。

付録２　図１(a)で折り線 {p, q}で折った時の MD, CN を求める。

図１(a)において、$\tan(\theta) = p - q$ によって折り線の傾き θ を定義します。ΔMDP において、$DP = 1 - p$,　$\angle MDP = 2\theta$ なので、

$$MD = (1 - p)\tan(2\theta) = (1 - p)[2\tan(\theta)/\{1 - \tan^2(\theta)\}$$

$$= 2(1 - p)(p - q)/\{1 - (p - q)^2\}$$

となります。ここで三角形の倍角の公式を使いました。

一方、$\Delta QB'N$ において、$QB' = q$, $\angle NQB' = 2\theta$ なので、

$$B'N = q \tan(2\theta)$$

ピタゴラスの定理を使うと、

$$QN^2 = QB'^2 + B'N^2 = q^2 + q^2 \tan^2(2\theta) = q^2\{1 + \tan^2(2\theta)\} = q^2 \sec^2(2\theta)$$

ここで、

$$\sec(2\theta) = \{1 + \tan^2(\theta)\}/\{1 - \tan^2(\theta)\}$$

の関係を使うと、

$$QN = q \sec(2\theta) = q\{1 + (p - q)^2\}/\{1 - (p - q)^2\}$$

で与えられます。したがって、

$$NC = 1 - q - QN = \{1 - 2q - (p - q)^2\}/\{1 - (p - q)^2\}$$

となります。