折り紙の幾何学 (1)　　　　品川公成

—(2n+1)✕(2n+1)のマス目(n=1, 2, …)を折る—

はじめに

　折り紙では、鶴などで代表されるような折り紙の作品を作って楽しむことができますが、一方で、折り紙を使って幾何学の問題を解くこともできます。よく知られた例では、角を３等分する問題があります。この問題は、定規とコンパスでは解くことができませんが、折り紙を折れば、比較的簡単に３等分することができます。このように折り紙で幾何学を楽しむ分野を芳賀和夫氏はオリガミックスと命名しています。ここで扱う折り紙のマス目折りの問題もその一例です。ここでは、折り紙を 3✕3, 5✕5, 7✕7,… のような奇数✕奇数のマス目に折る折り方を紹介します。

１．折り紙と折り線

　ここでは、図１に示すように、折り紙の４隅を直交座標(x, y)で A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1)および D(0, 1)のように表わします。

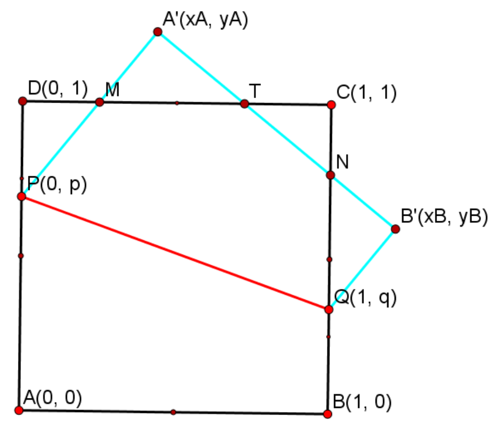

図１　折り紙の座標と折り線(赤字)で折った状態(青字)

また、赤字で示した折り線の端点を P(0, p)、Q(1, q), $0 \le p, q \le 1$、折った状態(青字)での隅 A, B の位置を A’, B’とします。 さらに、折り方の基本となる折り線を{p, q}のように表すことにします。

PQを通る折り線は

$$y = (q - p)x + p \tag{1}$$

で与えられます。ここで、AとA' の中点 $(x_A/2, y_A/2)$は、折り線上にあるので、

$$y_A/2 = (q - p)(x_A/2) + p \quad \rightarrow \quad y_A = (q - p)x_A + 2p \tag{2}$$

を満たします。また、直線AA'は、折り線PQに直交するので、直交条件から

$$(y_A/x_A)(q - p) = -1 \quad \rightarrow \quad y_A = \{1/(p - q)\}x_A \tag{3}$$

となります。式(2)と式(3)から、x_A, y_Aをp, qで表すと以下の様になります。

$$x_A = 2p(p - q)/\{(p - q)^2 + 1\}, \quad y_A = 2p/\{(p - q)^2 + 1\} \tag{4}$$

また、p, qをx_A, y_Aで表すと、

$$p = (x_A^2 + y_A^2)/(2y_A), \quad q = \{x_A(x_A - 2) + y_A^2\}/(2y_A) \tag{5}$$

となります。

同様に、BとB'の中点$((x_B + 1)/2, y_B/2)$が折り線上にあることから、

$$y_B/2 = (q - p)(x_B + 1)/2 + p \quad \rightarrow \quad y_B = (q - p)x_B + p + q \tag{6}$$

また、直線BB' が折り線PQに直交することから、

$$\{y_B/(x_B - 1)\}(q - p) = -1 \quad \rightarrow \quad y_B = \{1/(p - q)\}(x_B - 1) \tag{7}$$

の関係が得られます。式(6)と式(7)から、

$$x_B = (p^2 - q^2 + 1)/\{(p - q)^2 + 1\}, \quad y_B = 2q/\{(p - q)^2 + 1\} \tag{8}$$

となります。同様に、図1における辺上の点M, T, Nなどもp, qを用いて表すことができます。

２　芳賀折り

芳賀折りとして知られている折り方は、図２のように、隅 A を辺 CD 上に重ねて折ります。さらに、芳賀折りでは、A’D の長さを x として各長さを表します。

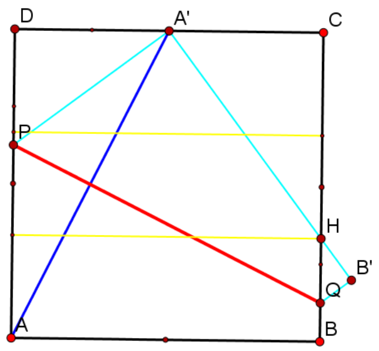

図２　芳賀折り

折り線との関係は、式(3)から、

$$x = p - q\,, \tag{9}$$

また、式(5)から

$$p = (x^2 + 1)/2,\ q = (x - 1)^2/2 \tag{10}$$

となります。図２の芳賀折りに現れる直角三角形、Δ A’DP, Δ HCA’, Δ QB’H は、相似な三角形なので、これらの三角形の辺の長さはすべて x を用いて表すことができます。例えば、Δ A’DP と Δ HCA’では、

$$(1 - p) : x = (1 - x) : HC \tag{11}$$

から、

$$HC = x(1 - x)/(1 - p) = 2x(1 - x)/(1 - x^2) = 2x/(1 + x) \tag{12}$$

となります。さらに、BH は、

$$BH = 1 - HC = 1 - 2x/(1 + x) = (1 - x)/(1 + x) \tag{13}$$

で与えられます。とくに、式(13)において $x = 1/2$、すなわち、隅 A を辺 CD の中点に重ねるように折ると、BH の長さは 1/3 になります。したがって、図２の黄色の線のように、y 方向(縦方向)を３分割することが可能です(芳賀の定理)。なお、$x = 1/2$ の場合には、式(10)から折り線は{5/8, 1/8}となるので、この折り線でも折ることができます。

3. (2n+1)✕(2n+1)マス目(n = 1, 2, …)の折り方

ここでは、図１の４つの三角形、ΔMDP, ΔCTN、ΔTA'M およびΔQB'N が合同な直角三角形になるような折り方を扱います。この折り方では、ΔMDP とΔNCT が合同な三角形なので MD = CN となります。したがって、MD = CN = 1/(2n + 1)に折るための折り線{p, q}が分かれば、(2n + 1)✕(2n + 1)のマス目に折ることが可能です。

先の４つの三角形の合同条件から、

$$1 - p = DP = TA' = CT = QB' = BQ' = q \tag{14}$$

となるので、折れ線は、

$$p + q = 1 \tag{15}$$

の関係を満たします。また、

$$TM = 1 - MD - CT = 1 - MD - 1 + p = p - MD, \tag{16}$$

から、ΔMDP とΔTA'M にピタゴラスの定理を適用すると、

$$(1 - p)^2 + MD^2 = (p - MD)^2 \tag{17}$$

が成り立ちます。したがって、

$$MD = (2p - 1)/(2p) \tag{18}$$

で与えられます。例えば、折り紙を 3✕3 のマス目に折りたい場合には、MD = 1/3 として、

$$(2p - 1)/(2p) = 1/3 \rightarrow p = 3/4, \quad q = 1/4, \tag{19}$$

から、折れ線を{3/4, 1/4}として折ればよいことになります。この折り線で折り紙を折った状態を図３に示します。

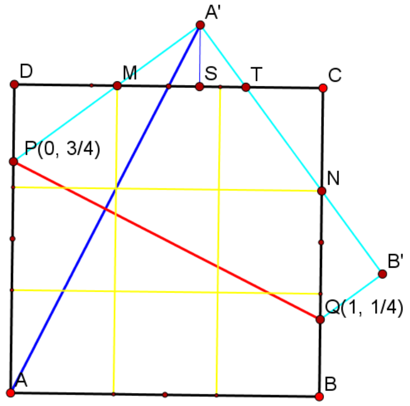

図３　3✕3 のマス目の折り方

この図の黄色の線で示すように、確かに、3✕3 のマス目ができていることが分かります。

　この折り方に慣れるために、もう一例として、5✕5 のマス目を折ってみます。この場合も MD = 1/5 とすると、折り線は

$$(2p - 1)/(2p) = 1/5 \rightarrow p = 5/8, \quad q = 3/8 \tag{20}$$

から、{5/8, 3/8}となります。図４に、この折り線で折った状態を示します。

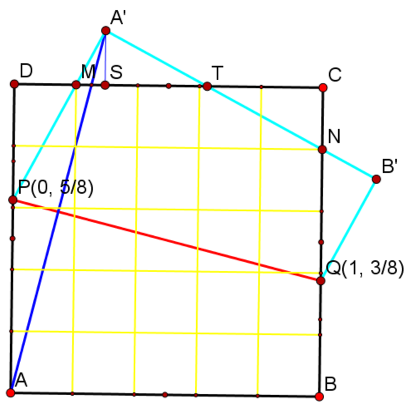

図４　5✕5 のマス目の折り方

この場合も図の黄色の線で示すように、5✕5 のマス目ができていることが分かります。

以上の２つの例から明らかなように、一般に、折り紙を(2n + 1)✕(2n + 1)のマス目に折るには、MD = 1/(2n + 1) として、

$$(2p - 1)/(2p) = 1/(2n + 1) \rightarrow p = (2n + 1)/(4n), \quad q = (2n - 1)/(4n) \qquad (21)$$

から、折り線を{(2n + 1)/(4n), (2n - 1)/(4n)}とすればよいことになります。この折り線を使うと、(2n + 1)✕(2n + 1)のマス目を折ることができます。しかし、この結果は数学での話で、折り紙を折る立場からは、折り線の位置が分からなければ折ることはできません。これまでの図３と図４の例のように、折り線の端点の位置が折り紙の縦横を繰り返し半分に折ることによって見つけられる場合には折ることができますが、そうでない場合には工夫が必要になります。例えば、n = 3、すなわち、7✕7 のマス目を折ろうとすると、折れ線は式(21)から、{7/12, 5/12}となるので、折れ線の端点の位置はすぐには分かりません。この場合には、はじめに 3✕3 のマス目を折って、続けて繰り返し半分に折れば、折り線の端点を見つけることができます。このようにして折った 7✕7 のマス目の折り方を図 5 に示します。

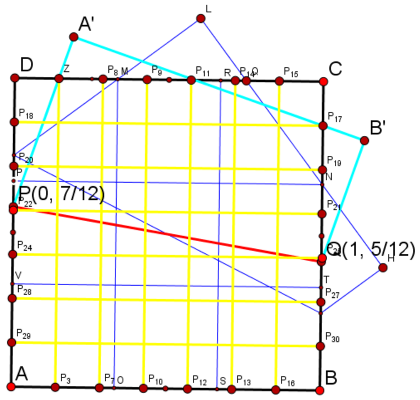

図５ 7✕7 のマス目の折り方

同様な工夫は 13✕13 マス目折り(n = 6)でも必要になります。また、11✕11 マス目折り（n = 5）では、折り線が{11/20, 9/20}となるので、5✕5 のマス目を使えば、同様に折り線の端点を見つけることができます。

なお、折り紙を(2n + 1)✕(2n + 1)のマス目に折った状態での図１の諸量は、以下の様に与えられます。

$$
\begin{aligned}
x_A &= (2n + 1)/(4n^2 + 1),\\
y_A &= 2n(2\,n + 1)/(4n^2 + 1),\\
x_B &= 2n(2n + 1)/(4n^2+1)\\
y_B &= 2n(2n - 1)/(4n^2+1)\\
MD &= NC = A'M = B'N = 1/(2n + 1),\\
SM &= 4n/\{(2n + 1)(4n^2+1)\},\\
TS &= (2n + 1)(2n - 1)^2/\{4n(4n^2 + 1)\},\\
CT &= DP = BQ = QB' = TA' = (2n - 1)/4n = q,\\
QN &= NT = TM = MP = (4n^2 + 1)/\{4n(2n + 1)\}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

まとめ

折り線 P(0, p)Q(1, q)において、$p = (2n + 1)/(4n)$, $q = (2n - 1)/(4n)$, $n = 1, 2, 3,\ldots$ で表せるとき、この折り線の位置が折り紙上で分かれば、折り紙を(2n + 1)✕(2n + 1)のマス目に折れることを示しました。また、(2n + 1)✕(2n + 1)のマス目に折った状態での図 1 の諸量を導きました(式(22))。